研究简讯

时滞微分方程真解光滑化的定性分析*

甘四清 孙耿
清华大学计算机科学与技术系，北京 100084 中国科学院数学研究所，北京 100080

摘要 通过对时滞微分方程作适当扰动使得扰动解充分光滑．讨论了时滞微分方程的真解、扰动方程的真解和它们的数值解之间的关系．得到了时滞微分方程数值解的整体误差与相应扰动方程数值解的整体误差之间的关系．为处理时滞微分方程真解的不光滑性提供了新的途径．

关键词 时滞微分方程 扰动 光滑性

考虑时滞微分方程(DDEs)[1,2]

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau(t))), t \geqslant 0, \\ y(t) = \varphi(t),\ t \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

这里 f：$[0, +\infty) \times C \times C \to C$ 是充分光滑的映射，$\varphi(t)(t \leqslant 0)$是充分光滑的函数，$\tau(t)(>0)$是充分光滑的有界函数，且 $t-\tau(t)$是关于 $t(t>0)$的严格增加函数．即使 f，$\varphi(t)$和 $\tau(t)$满足上述光滑性要求，一般说来，(1) 的真解在 $t=0$ 处不能与 $\varphi(t)$光滑连接，只能保证在该点连续．该点的不光滑性还会沿着积分区间向右传播．确切地说，不光滑点满足如下关系

$$\xi_k - \tau(\xi_k) = \xi_{k-1}, \quad k \geqslant 1, \tag{2}$$

这里 $\xi_0 = 0$．根据对 $f(t, y(t), y(t-\tau(t)))$，$\tau(t)$和 $\varphi(t)$的假设，在每个区间(ξ_{k-1}, ξ_k)内，真解 $y(t)$是充分光滑的．此外，容易看到，真解在 ξ_k 处至少是 C^k-连续的，只要在 ξ_0 处是 C^0-连续的．换句话说，随着 k 的增加，$y(t)$在 ξ_k 处的光滑性在逐步改善[3,4]．

1 主要结果及证明

由文献［3，4］知道，若问题(1)的真解在 $t=0$ 处是 C^p-连续的，则真解在 $t=\xi_k$ 处至少是C^{p+k}-连续的．因此要提高真解的整体光滑性，关键是提高真解在 $t=0$ 处的光滑性．

考虑与(1)相应的扰动问题

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t), z(t-\tau(t))), t \geqslant 0, \\ z(t) = \tilde{\varphi}(t),\ t \leqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

这里

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)(t-t_0) + \cdots + \dfrac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!}(t-t_0)^p + a_1(t-t_0)^{p+1} + \\ \quad \cdots + a_{p+1}(t-t_0)^{2p+1}, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant 0, \\ \varphi(t), \qquad t \leqslant t_0, \end{cases} \tag{4}$$

p 是任意给定的正整数，$t_0(-\tau_0 < t_0 < 0)$是参数，$\tau_0 = \tau(0)$，a_1，a_2，…，a_{p+1}是待定常数．显然 $\tilde{\varphi}(t)$在 $t=t_0$ 处是 C^p-连续的，在 $t \neq t_0$ $(t<0)$处是充分光滑的．由文献［3，4］知，问题(3)的真解在 $\eta_i(i=1, 2, \cdots)$处至少是 C^p-连续的，这里 η_i 由下面的关系式确定

$$\eta_i - \tau(\eta_i) = \eta_{i-1}, \quad i \geqslant 1,$$

2001-09-03 收稿，2002-02-15 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目（批准号：19871086，10101027）
E-mail：siqinggan@tsinghua.edu.cn

其中 $\eta_0=t_0$.

为了使(3)的真解 $z(t)$ 与初始函数 $\tilde{\varphi}(t)$ 在 $t=0$ 处也是 C^p-连续连接，令

$$\tilde{\varphi}(0-0)=z(0+0)=\varphi(0),\tilde{\varphi}_-'(0)=z_+'(0),\cdots,\tilde{\varphi}_-^{(p)}(0)=z_+^{(p)}(0), \tag{5}$$

这里 $z_+^{(i)}(0)$ 可以通过 $\varphi(0)$, $\varphi(-\tau_0)$, $\cdots$, $\varphi^{(i-1)}(-\tau_0)$ 和 f 来表示，即

$$\begin{aligned} &z(0+0)=\varphi(0),\\ &z'_+(0)=f(0,\varphi(0),\varphi(-\tau_0)),\\ &z''_+(0)=f_t(0,\varphi(0),\varphi(-\tau_0))+f_{z(t)}(0,\varphi(0),\varphi(-\tau_0))f(0,\varphi(0),\varphi(-\tau_0))+\\ &\qquad f_{z(t-\tau(t))}(0,\varphi(0),\varphi(-\tau_0))\cdot\varphi'(-\tau_0)(1-\tau'(0)),\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots \end{aligned}$$

将(4)代入(5)得

$$\begin{aligned} &b_1+b_2+\cdots+b_{p+1}=\varphi(0)-\varphi(t_0)-\varphi'(t_0)(-t_0)-\cdots-\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{p!}(-t_0)^p,\\ &(p+1)b_1+(p+2)b_2+\cdots+(2p+1)b_{p+1}=(-t_0)\Big(z_+'(0)-\varphi'(t_0)-\cdots-\frac{\varphi^{(p)}(t_0)}{(p-1)!}(-t_0)^{p-1}\Big),\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots,\\ &(p+1)p\cdots 2b_1+(p+2)(p+1)\cdots 3b_2+\cdots+(2p+1)2p\cdots(p+2)b_{p+1}=(-t_0)^p\big(z_+^{(p)}(0)-\varphi^{(p)}(t_0)\big), \end{aligned} \tag{6}$$

这里 $b_1=a_1(-t_0)^{p+1}$, $b_2=a_2(-t_0)^{p+2}$, $\cdots$, $b_{p+1}=a_{p+1}(-t_0)^{2p+1}$. (6)的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ p+1 & p+2 & \cdots & 2p+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (p+1)p\cdots 2 & (p+2)(p+1)\cdots 3 & \cdots & (2p+1)2p\cdots(p+2) \end{pmatrix} \tag{7}$$

因 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，所以线性系统(6)存在惟一解 $(b_1, b_2, \cdots, b_{p+1})^{\mathrm{T}}$. 由一致连续性，有 $\varphi(0)-\varphi(t_0)=\mathcal{O}(t_0)$. 由(6)推出

$$\boldsymbol{A}(b_1,b_2,\cdots,b_{p+1})^{\mathrm{T}}=(\mathcal{O}(t_0),\mathcal{O}(t_0),\cdots,\mathcal{O}(t_0^p))^{\mathrm{T}}.$$

因此

$$b_i=\mathcal{O}(t_0),i=1,2,\cdots,p+1. \tag{8}$$

现在来估计扰动的大小. 当 $t\in[t_0, 0]$ 时，利用(4)得

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)&=-\frac{1}{p!}\int_{t_0}^t\varphi^{(p+1)}(s)(t-s)^p\mathrm{d}s+a_1(t-t_0)^{p+1}+\cdots+a_{p+1}(t-t_0)^{2p+1}=\\ &-\frac{1}{p!}\int_{t_0}^t\varphi^{(p+1)}(s)(t-s)^p\mathrm{d}s+a_1(-t_0)^{p+1}\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(-t_0)^{p+1}}+\cdots+a_{p+1}(-t_0)^{2p+1}\frac{(t-t_0)^{2p+1}}{(-t_0)^{2p+1}}, \end{aligned}$$

由此得

$$|\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)|\leqslant\frac{M_{p+1}}{(p+1)!}|t-t_0|^{p+1}+|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_{p+1}|,$$

这里 $M_{p+1}=\max_{-\tau_0\leqslant t\leqslant 0}|\varphi^{(p+1)}(t)|$. 注意到当 $t\leqslant t_0$ 时有 $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)$，因此由上式及(8)式得

$$\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)=\mathcal{O}(t_0),\quad t\leqslant 0.$$

由此可见，只要 $|t_0|$ 充分小就能保证 $|\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t)|$ 也是充分小的.

定理 1　对于问题(1)，存在关于其初始函数 $\varphi(t)$ 在区间 $t\in(t_0, 0)$ 内的扰动 $\tilde{\varphi}(t)$，使得扰动问题(3)的真解 $z(t)\in\mathbb{C}^p[0, +\infty)$，且只要 $|t_0|$ 充分接近于0，就有 $|\varphi(t)-\tilde{\varphi}(t)|\leqslant\varepsilon$, 这里 p 是任意给定的正整数，ε 是任意给定的正数.

现在来讨论(1)的真解、(3)的真解及它们的数值解之间的关系. 由定理 1 立即得到

推论 1　如果问题(1)和(3)的真解满足

$$|y(t)-z(t)| \leqslant C(t)\sup_{x\leqslant 0}|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|,\quad t\in[0,+\infty), \tag{9}$$

且$|t_0|$充分接近于0，则

$$|y(t)-z(t)| \leqslant C(t)\varepsilon,\ t\in[0,+\infty),$$

这里$C(t)$是t的函数.

推论2 如果问题(1)和(3)的真解满足条件(9)，一个p阶收敛的数值方法保持相应的性质，即

$$|y_n-z_n| \leqslant D(t_n)\sup_{x\leqslant 0}|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{10}$$

且$|t_0|$充分接近于0，则问题(1)的数值解的整体误差满足

$$\begin{aligned}|y_n-y(t_n)| &\leqslant |y_n-z_n|+|z_n-z(t_n)|+|z(t_n)-y(t_n)| \leqslant \\ &(C(t_n)+D(t_n)\sup_{x<0}|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|+\mathcal{O}(h^p) \leqslant (C(t_n)+D(t_n))\varepsilon+\mathcal{O}(h^p).\end{aligned} \tag{11}$$

这里$D(t)$是t的函数，$\{y_n\}$和$\{z_n\}$分别表示问题(1)和(3)的数值解序列.

例1 如果$\tau(t)\equiv\tau$(τ是常数)，f满足如下的条件

$$\begin{aligned}&Re((u_1-u_2)(f(t,u_1,v)-f(t,u_2,v)))\leqslant \alpha|u_1-u_2|^2,\ t\geqslant 0,\ u_1,u_2,\ v\in\mathbb{C},\\ &|f(t,u,v_1)-f(t,u,v_2)|\leqslant\beta|v_1-v_2|,\ t\geqslant 0,u,v_1,v_2\in\mathbb{C},\end{aligned} \tag{12}$$

这里α和β是实常数，$\alpha+\beta\leqslant 0$. 则问题(1)及其扰动问题(3)的解满足[5]

$$|y(t)-z(t)|\leqslant\sup_{x\leqslant 0}|\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)|.$$

文献[6]证明了用代数稳定的Runge-Kutta方法(时滞部分用线性Lagrange插值)求解满足条件(12)的问题(1)时，数值解满足关系式(10)，这里$D(t)\equiv\sqrt{1+c\beta\tau}$，$c$是常数. 因此，由(11)得

$$|y_n-y(t_n)|\leqslant(1+\sqrt{1+c\beta\tau})\varepsilon+\mathcal{O}(h^p).$$

由此可以得到问题(1)的数值解之整体误差估计.

用某数值方法(如：线性多步法或Runge-Kutta方法，时滞部分用适当插值)求解问题(1)或(3)时，可能只用到了初始函数$\varphi(t)$或$\tilde{\varphi}(t)$在有限个点的值，如果这有限个点不在区间$(t_0,0)$内，则我们用同样的方法、同样的插值及同样的步长分别求解(1)和(3)时，有$y_n=z_n$($n=0,1,2,\cdots$)，即问题(1)和问题(3)的数值解完全一样. 因此

推论3 如果问题(1)满足条件(9)，且用同样的方法、同样的插值及同样的步长分别求解(1)和(3)时，如果数值解不涉及到初始函数在区间$(t_0,0)$内的值，则$y_n=z_n$($n=0,1,2,\cdots$). 如果数值方法是p阶收敛的，即$z_n-z(t_n)=\mathcal{O}(h^p)$，$n\geqslant 0$，则我们有如下的估计式

$$|y_n-y(t_n)|\leqslant|z_n-z(t_n)|+|z(t_n)-y(t_n)|\leqslant\mathcal{O}(h^p)+C(t_n)\varepsilon.$$

因扰动问题(3)具有所需要的整体光滑性，可以很方便地用数值方法求解它，得到整体误差$|z_n-z(t_n)|$估计，然后应用推论2和推论3来获得问题(1)的数值解之整体误差$|y_n-y(t_n)|$估计.

参考文献

1 Driver R D. Ordinary and Delay Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

2 Hale J K. Theorey of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

3 Hairer E, et al. Solving ordinary differential equations I, Nonstiff Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1993

4 Zennaro M. Delay differential equations: Theory and Numerics, Theory and Numerics of Ordinary and Partial Differential Equations. Ainsworth M, et al. eds. Oxford: Clarendon, 1995. 291-333

5 Torelli L. Stability of numerical methods for delay differential equations. J Comput Appl Math, 1989, 25: 15

6 Huang C M, et al. Stability analysis of Runge-Kutta methods for nonlinear delay differential equations. BIT, 1999, 39: 270